

文章编号:1006-8341(2014)02-0213-03

## 线性方程组在线性代数中的中心地位

陈 敏

(东华大学 理学院, 上海 201620)

**摘要:**结合《线性代数》课程的实践教学,着重介绍了线性方程组在教学中的重要作用.阐述了线性方程组在向量概念中的应用,在解空间维数上的应用以及在讨论向量线性相关无关上的应用.通过以线性方程组为中心展开线性代数课程的教学,取得了较好的教学效果.

**关键词:**线性相关;线性无关;维数;秩

**中图分类号:** O 151. 2

**文献标识码:** A

## 0 引言

线性代数是大学数学公共课之一,该课程内容抽象,概念、定理多,计算量大.如何在几十个课时内讲好线性代数这门课程,使学生掌握线性代数的基本思想和方法,是任课教师必须思考和解决的问题.线性方程组在线性代数<sup>[1]</sup>课程中起着重要作用.教学实践发现,由线性方程组作为突破口进行教学,是一个行之有效的方法,这也是很多教师的选择<sup>[2-8]</sup>.线性代数中行列式理论归结为 Cramer 法则,矩阵理论的初等变换导出方程组解的理论,向量的概念都与方程组解的情况相联系.反过来,方程组的理论也在线性代数其它问题中有着广泛应用.本文讨论一些线性方程组在这三方面的应用.

## 1 向量的概念与线性方程组

向量  $b$  是  $a_1, \dots, a_k$  的线性组合,指存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , 使  $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ . 而这个关系可写成方程组

形式:  $A\lambda = (a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = b$ , 从而可知  $b$  是  $a_1, \dots, a_k$  的线性组合的充要条件是方程  $AX = (a_1, \dots,$

$a_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = b$  有解. 这样可知  $AX = b$  有解的充要条件为  $r(A | b) = r(A)$ . 与之相类似地有: 一个向量组  $a_1,$

$\dots, a_k$  是线性相关(线性无关)的充要条件是方程  $AX = (a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$  有非零解(只有零解).

例 1  $r(a_1, a_2, a_3) = 1, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0, a_4 = 2a_1 + 3a_3$ .

收稿日期:2012-12-30

作者简介:陈敏(1972-),女,浙江省绍兴市人,东华大学副教授. E-mail:chenmin@dhu.edu.cn

求  $(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_4$  的通解.

解 由条件可知  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  与  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  为方程的解. 从而  $X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  为  $(a_1 \ a_2 \ a_3)X = 0$  的解.

另外,  $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  也为  $(a_1 \ a_2 \ a_3)X = 0$  的解, 且  $X_3, X_4$  线性无关, 而  $r(a_1, a_2, a_3) = 1$ . 从而原方程通解为

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## 2 线性方程组解空间上的应用

由于  $AX = 0$  的解全体  $\{X \mid AX = 0\}$  为一个线性空间, 它的维数为  $\dim\{X \mid AX = 0\} = n - r(A)$ , 这是线性代数中一个重要结果, 且应用广泛.

(1) 若  $\{X \mid AX = 0\} \subset \{BX = 0\}$ , 则  $r(B) \leq r(A)$ , 且等式成立时,  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解.

(2) 若  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解, 则  $r(A) = r(B)$ .

(3) 若  $\{X_1, \dots, X_k\}$  为  $AX = 0$  的解, 则  $r(X_1, \dots, X_k) \leq n - r(A)$ .

利用这些结果可以完成有关秩的问题的证明.

例 2 证明  $r(A^T A) = r(A)$ .

证明 由于  $AX = 0$ , 则  $A^T AX = 0$ ; 又若  $A^T AX = 0$ , 则  $XA^T AX = 0$ . 从而  $(AX)^T AX = 0$ , 因此有  $AX = 0$ . 从而  $r(A^T A) = r(A)$ .

例 3  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $A^2 = A$ , 证明  $r(A) + r(E - A) = n$ .

证明 由  $A^2 = A$ , 导出  $A(E - A) = 0$ , 从而  $r(A) + r(E - A) \leq n$ . 又由  $r(A) + r(E - A) \geq r(A + (E - A)) = r(E) = n$ , 因此有  $r(A) + r(E - A) = n$ .

利用这个结果, 还可以讨论一个  $n$  阶矩阵  $A$  是否可以相似于一个对角阵. 一个矩阵  $A$  可以相似于对角阵的充分必要条件是它有  $n$  个线性无关的特征向量. 因此要判别  $A$  相似于对角阵可由  $A$  的所有特征值  $\lambda_i$  的重数  $k_i = n - r(A - \lambda_i E)$  决定.

## 3 线性方程组解与向量线性相关性的讨论

例 4 若  $a_1, \dots, a_n$  线性无关,  $b_1 = \lambda_{11}a_1 + \dots + \lambda_{1n}a_n, \dots, b_m = \lambda_{m1}a_1 + \dots + \lambda_{mn}a_n$ .

证明  $r(b_1, \dots, b_m) = r(A) = r \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$ .

证明 (1) 若  $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$  线性无关, 则  $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1 1} \\ \dots \\ \lambda_{i_1 n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_{i_k 1} \\ \dots \\ \lambda_{i_k n} \end{pmatrix}$  也线性无关. 事实上,  $\mu_1 b_{i_1} + \dots + \mu_k b_{i_k} =$

$$\mu_1(\lambda_{i_1 1}a_1 + \dots + \lambda_{i_1 n}a_n) + \dots + \mu_k(\lambda_{i_k 1}a_1 + \dots + \lambda_{i_k n}a_n) = (\mu_1\lambda_{i_1 1} + \dots + \mu_k\lambda_{i_k 1})a_1 + \dots + (\mu_1\lambda_{i_1 n} + \dots + \mu_k\lambda_{i_k n})a_n = 0.$$

充要条件  $\mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1 1} \\ \dots \\ \lambda_{i_1 n} \end{pmatrix} + \dots + \mu_k \begin{pmatrix} \lambda_{i_k 1} \\ \dots \\ \lambda_{i_k n} \end{pmatrix} = 0$ .

(2)  $b_{i_{k+1}} = \mu_1 b_{i_1} + \dots + \mu_k b_{i_k}$  的充要条件

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_{k+1}1} \\ \cdots \\ \lambda_{i_{k+1}n} \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_{i_11} \\ \cdots \\ \lambda_{i_1n} \end{pmatrix} + \cdots + \mu_k \begin{pmatrix} \lambda_{i_k1} \\ \cdots \\ \lambda_{i_kn} \end{pmatrix}.$$

事实上,  $\mu_1 \mathbf{b}_{i_1} + \cdots + \mu_k \mathbf{b}_{i_k} = (\mu_1 \lambda_{i_11} + \cdots + \mu_k \lambda_{i_k1}) \mathbf{a}_1 + \cdots + (\mu_1 \lambda_{i_1n} + \cdots + \mu_k \lambda_{i_kn}) \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_{i_{k+1}} = \lambda_{i_{k+1}1} \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{i_{k+1}n} \mathbf{a}_n$ .

从而有  $\mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_{i_11} \\ \cdots \\ \lambda_{i_1n} \end{pmatrix} + \cdots + \mu_k \begin{pmatrix} \lambda_{i_k1} \\ \cdots \\ \lambda_{i_kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_{k+1}1} \\ \cdots \\ \lambda_{i_{k+1}n} \end{pmatrix}$ , 因此有  $r(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m) = r(\mathbf{A})$ .

例5  $\mathbf{b}_1 = \lambda_{11} \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{1n} \mathbf{a}_n, \cdots, \mathbf{b}_m = \lambda_{m1} \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{mn} \mathbf{a}_n$ , 若  $m > n$ , 则  $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m$  线性无关.

证明 由  $\mu_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{b}_m = (\mu_1 \lambda_{11} + \cdots + \mu_m \lambda_{m1}) \mathbf{a}_1 + \cdots + (\mu_1 \lambda_{1n} + \cdots + \mu_m \lambda_{mn}) \mathbf{a}_n$ , 而

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \cdots + \lambda_{m1}x_m = 0, \\ \cdots \\ \lambda_{1n}x_1 + \cdots + \lambda_{mn}x_m = 0 \end{cases} \quad \text{在 } m > n \text{ 时有非零解. 从而存在不全为 } 0 \text{ 的 } \mu_1, \cdots, \mu_m, \text{ 使 } \mu_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{b}_m =$$

$\mathbf{0}$ , 所以  $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m$  必线性相关.

## 4 结束语

由于线性方程组在线性代数教学中处于核心地位, 所以研究线性方程组的应用是非常必要的. 文中只是给出线性方程组在线性代数中 3 个方面的主要应用, 更多的应用仍值得进一步研究. 由线性方程组出发进行概念的提出, 定理的证明和问题的解答等, 会让学生更容易接受, 能取得更好的教学效果.

参考文献:

- [1] 孟昭为, 孙锦萍, 赵文玲, 等. 线性代数[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2010.
- [2] 何立国, 施武杰. 以线性方程组为中心展开线性代数课程的教学[J]. 大学数学, 2009, 25(6): 203-206.
- [3] 朱春纲. 向量组线性相关性的教学方法与技巧[J]. 高等数学研究, 2010, 13(4): 119-121.
- [4] 朱章遐, 殷志祥, 许峰. 线性代数中线性方程组有关内容的教与学[J]. 科技信息, 2010, 33: 11.
- [5] 窦永平. 线性代数的教学思路(十二)——线性方程组解结构理论的教学思路[J]. 甘肃科技纵横, 2007, 36(3): 184.
- [6] 吴珊. 巧用线性方程组的两种表示形式解析向量间的线性关系[J]. 数学学习与研究, 2011(1): 64-65.
- [7] 李佩泽. 对线性代数中线性方程组教学的实践和体会[J]. 科教创新, 2007, 14: 21-23.
- [8] 刘丹丹, 刘威. 线性代数中几个核心概念的内部联系及深入解析[J]. 黑龙江科技信息, 2010, 26: 163.

## The central position of linear equations system in the linear algebra

CHEN Min

(College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** Through the practical teaching of linear algebra, the roles of linear equations system are considered. The applications of linear equations system are introduced in three aspects: the applications in the vector concept, the dimension of solution space and the discussion of linear dependent. By introducing linear equations on teaching, the learning enthusiasm of students is improved and better teaching effect is obtained.

**Key words:** linearly dependent; linear independent; dimension; rank

编辑: 武 晖; 校对: 赵 放、师 琅