

doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2015.01.019

一道全国大学生数学竞赛决赛题的推广

高剑明, 叶海平

(东华大学 理学院 应用数学系, 上海 201620)

摘要 解答一道全国大学生数学竞赛非数学类决赛试题, 该试题涉及微分方程, 定积分及一元函数求极限. 针对以积分形式表示的函数求极限问题, 将定义在 $[0, 1]$ 区间上特定的被积函数分别推广到单调连续函数、连续函数及 $[-1, 1]$ 区间上的连续函数这三种形式. 利用夹逼准则、连续函数的定义及反常积分一致收敛的性质可证推广命题成立.

关键词 夹逼准则; 数列极限; 函数极限; 一致收敛

中图分类号 O172.2

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2015)01-0077-02

Generalizations for a Question of China Undergraduate Mathematical Contest in Finals

GAO Jianming, YE Haiping

(Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 201620, PRC)

Abstract: A question of China undergraduate mathematical contest in finals for non-mathematics major is studied. The problem concerns the knowledge of differential equations, definite integral and limit of single variable function. For the limit of function, which is described by definite integral, the given integrand defined on the interval $[0, 1]$ is extended to the monotonic continuous function, continuous function on the interval $[0, 1]$ and continuous function on the interval $[-1, 1]$, respectively. Our proofs involve sandwich theorem, the definition of continuous function and the nature of improper integral of uniform convergence.

Keywords: sandwich theorem, limit of sequences, limit of functions, uniform convergence

2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛试题 (非数学类) 的最后一题为

(i) 求解微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(ii) 如 $y = f(x)$ 为上述方程的解, 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

本文给出这道试题的解答并针对该试题的第

(ii) 小题, 介绍三种一般形式的推广.

1 原竞赛题解答

(i) 微分方程

$$\frac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}$$

收稿日期: 2013-10-14; 修改日期: 2014-09-04

作者简介: 高剑明 (1963—), 男, 上海人, 副教授, 从事常微分方程研究. Email: jmgao@dh. edu. cn

叶海平 (1964—), 女, 上海人, 博士, 副教授, 从事分数阶微分方程研究. Email: hpye@dh. edu. cn

通解为

$$y = e^{\int x dx} \left(\int x e^{x^2} e^{\int -x dx} dx + C \right) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(\int x e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right) = e^{x^2} + C e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

将 $y(0) = 1$ 代入, 得 $C = 0$, 故方程的解为

$$y = e^{x^2}.$$

(ii) 因为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx &< \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} e^{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} e^{x^2} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} e^{x^2} dx < \\ e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx &+ \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} e, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{n} = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{n}{n^2 x^2 + 1} dx + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} e \right] =$$

$$e^0 \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

根据夹逼准则^[1]可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

2 三种推广形式

首先,将第(ii)小题中特殊形式的 $f(x)$ 推广为满足如下条件的一般形式.

推广1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调且连续,则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

类似于竞赛原题中的第(ii)小题,利用夹逼准则可证该推广,从略.

进一步,删去推广1中的条件“ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调”,并将数列极限推广到函数极限,得到推广2.但证明已不能用夹逼准则,需要用到连续函数定义及反常积分一致收敛的性质^[2-3].

推广2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t}{t^2 x^2 + 1} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证明 作变换 $y = tx$,则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{t^2 x^2 + 1} f(x) dx &= \int_0^t \frac{1}{1+y^2} f\left(\frac{y}{t}\right) dy = \\ &= \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left[f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right] dy + \\ &= \int_0^t \frac{1}{1+y^2} f(0) dy. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+y^2} f(0) dy = \frac{\pi}{2} f(0),$$

因此只需证

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left[f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right] dy = 0.$$

由条件 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界,从而存在 $M > 0$,使得

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{y}{t}\right) \right| \leq M.$$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续,所以对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $0 \leq x < \delta$ 时,有

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

由于 $\int_0^{+\infty} \frac{M+|f(0)|}{1+y^2} dy$ 收敛,且

$$\left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| \leq$$

$$\left| f\left(\frac{y}{t}\right) \right| + |f(0)| \leq M + |f(0)|,$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy$ 对 t 一致收敛.因

此对上述 $\varepsilon > 0$,存在正数 X ,当 $A, A^* \geq X$ 时,有

$$\int_A^{A^*} \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy < \varepsilon.$$

特别取 $A = X, t > X$,就有

$$\int_X^t \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy < \varepsilon. \quad (2)$$

令 $X^* = \max\left\{\frac{X}{\delta}, X\right\}$,当 $t > X^*$,且 $0 \leq y \leq X$ 时,

$0 \leq \frac{y}{t} < \delta$,由式(1)知

$$\int_0^X \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy < \frac{\pi}{2} \varepsilon.$$

再由式(2)知,当 $t > X^*$ 时,有

$$\int_X^t \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy < \varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy &= \\ \int_0^X \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy + \\ \int_X^t \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy &< \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \varepsilon. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left[f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right] dy \right| &\leq \\ \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left| f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right| dy, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+y^2} \left[f\left(\frac{y}{t}\right) - f(0) \right] dy = 0.$$

最后,将 x 的变化区间 $[0,1]$ 推广到对称区间 $[-1,1]$,可得推广3,证法类似于推广2,从略.

推广3 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 x^2 + 1} f(x) dx = \pi f(0).$$

3 结束语

本文已对一道第三届全国大学生数学竞赛决赛试题进行了三种形式的推广.若将推广的定理特殊化,可得到不同的试题.这种研究对进一步拓宽学生数学视野很有帮助,可以使达到对数学问题触类旁通、举一反三的目的.

参考文献

- [1] 同济大学数学系.微积分:上册[M].北京:高等教育出版社,2002:56.
- [2] 李绍宽.高等数学学习指导书[M].上海:东华大学出版社,2000:13-15.
- [3] 上海交通大学数学系数学分析课题组.大学数学:数学分析:上册[M].北京:高等教育出版社,2007:250-260.