第 30 卷第 5 期
2014 年 10 月

大 学 数 学
COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 30, №. 5
Oct. 2014

巧用夹逼准则求极限

高剑明， 叶海平
（东华大学 理学院应用数学系，上海 201620）

［摘 要］对可用夹逼准则求极限的微积分题目进行了归纳和分类，有助于学生加深对夹逼准则的理解，并能在解题中举一反三.

［关键词］夹逼准则；数列极限；函数极限；反常积分
［中图分类号］O172.1；O172.2 ［文献标识码］C ［文章编号］1672-1454(2014)05-0119-04

夹逼准则是高等数学中求极限的重要方法之一[1]. 它的适用范围涉及求数列的极限，一元以及多元函数的极限，反常积分的计算等等. 近年来，全国大学生数学竞赛试题中也频频出现它的身影. 本文旨在巧用夹逼准则求各类极限. 通过归纳和分类，帮助学生掌握夹逼准则适用的类型和相关的解题技巧.

1 求数列的极限

［类型一］简单放缩.

当求和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，而求和很困难时，可适当放大、缩小和式，然后用夹逼准则.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\dfrac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\dfrac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\dfrac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\right)$.

常见错误 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}=0+\cdots+0=0$.

错误分析 在上述运算中，使用了极限运算法则“和的极限等于极限的和”，这个运算法则只对有限个函数之和的情形才成立. 但在本题中，随着 n 趋于无穷大，函数的个数也趋于无穷大，所以该解法是错误的. 正确解法是用夹逼准则.

解 由于

$$n\left(\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+n+k}{2n^3-k^2}\leqslant n\left(\frac{n^2+2n}{2n^3-n^2}\right),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^3-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{n^2+2n}{2n^3-n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+n+k}{2n^3-k^2}=\frac{1}{2}.$$

［类型二］适当放缩.

以定积分形式表示的数列，该定积分难以算出精确表达式，常用夹逼准则求该数列的极限. 这里，放大、缩小要适当，两头极限必须相等才行. 因此，如何适当放缩是难点.

［收稿日期］2013-10-13
［基金项目］东华大学高等数学分层次教学改革项目

“高等数学实验”课程教学改革的思考

叶海平，高剑明

（东华大学 理学院，上海 201620）

摘要：澳大利亚昆士兰科技大学的“高等数学实验”相关课程的设置值得借鉴。从对比的角度反思东华大学“高等数学实验”课程的不足和差距，为提高学生的数学理解能力和应用能力，以及今后数学实验类课程的教学改革方向提供思路。

关键词：高等数学实验；教学改革；MATLAB 软件

中图分类号：G642.0 文献标志码：A 文章编号：2095-3860(2014)01-0074-03

“高等数学实验”课程是高等学校为迎接21世纪数学教学改革而开设的一门新课程。我校（东华大学）开设该课程的宗旨是：综合运用微积分和线性代数等知识，结合数学软件MATLAB的使用，针对实际问题进行建模与求解计算，运用计算机手段加强学生对于数学理论的理解，增强学生数学知识的应用能力，提高学生对于数学学习的兴趣。该课程分成若干个实验，每个实验先复习相关的数学基本概念和定理，介绍一些相关的MATLAB函数和指令的使用方法；然后在计算实验中介绍一些最基本的数值计算方法和MATLAB函数指令的综合运用；最后是建模实验，介绍实际应用中的一些典型问题的数学模型和求解过程的MATLAB实现。要求学生掌握数学软件的使用以及对实际问题的建模与求解。

一、我校“高等数学实验”课程的现状和存在问题

笔者作为我校开设“高等数学实验”课程的第一任教师，连续任教这门课10余年，深感该课程在具体实施过程中存在着诸多问题。

1. 课程模式

我校开设该课程有两种上课模式[1]：

（1）分散在8周内上完，由MATLAB入门、MATLAB编程与作图、矩阵代数、函数和方程、应用微积分、常微分方程、MATLAB符号计算7个章节组成。每周4学时完成一章内容的教学，其中2学时教师讲解，2学时学生上机练习。考试一般安排在最后一周。

（2）集中在学期末一周上完。

第一种模式看似节奏安排合理，每周学习一章内容，7周学完，第8周考试。但8周中很可能遇上一次节假日，放掉一次课（4学时），那整个课程的教学就会受到影响。如果内容不减少，要求不降低，6周要学完7周的内容，难以安排，最终只能以减少内容、降低要求来完成教学任务。

第二种模式是集中一周（5天）强化学习，灌输的内容不易忘记，学生应付第6天的考试颇为有效。但缺点是知识不易消化，特别是对以前接触计算机不多的学生来说，要在5天内完成该课程的学习（32学时）具有相当大的挑战性。这部分学生会学得很累、很浮浅，难以深入理解该课程的知识。

2. 课程内容

以第四章“函数和方程”为例，在对上一章的上机习题所遇到的问题进行讲解（约20分钟）后，先简略介绍预备知识：零点、极值和最小二乘法，然后讲解函数零点、极值和最小二乘

基金项目：东华大学卓越工程师教学改革项目；东华大学理学院教学改革项目

作者简介：叶海平（1964—），女，上海人，副教授，博士，研究方向为分数阶微分方程。E-mail：hpye@dhu.edu.cn

doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2014.06.000

一道全国大学生数学竞赛决赛题的推广

高剑明，叶海平
（东华大学 理学院 应用数学系，上海 201620）

摘 要 解答一道全国大学生数学竞赛非数学类决赛试题，该试题涉及微分方程，定积分及一元函数求极限。针对以积分形式表示的函数求极限问题，将定义在[0,1]区间上特定的被积函数分别推广到单调连续函数、连续函数及[−1,1]区间上的连续函数这三种形式。利用夹逼准则、连续函数的定义及反常积分一致收敛的性质可证推广命题成立。

关键词 夹逼准则；数列极限；函数极限；一致收敛

中图分类号 O172.2 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2014)06-0000-00

Generalizations for a Question of China Undergraduate Mathematical Contest in Finals

GAO Jianming, YE Haiping
(Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 201620, PRC)

Abstract: A question of China undergraduate mathematical contest in finals for non−mathematics major is studied. The problem concerns the knowledge of differential equations, definite integral and limit of single variable function. For the limit of function, which is described by definite integral, the given integrand defined on the interval [0,1] is extended to the monotonic continuous function, continuous function on the interval [0,1] and continuous function on the interval [−1,1], respectively. Our proofs involve sandwich theorem, the definition of continuous function and the nature of improper integral of uniform convergence.

Keywords: sandwich theorem, limit of sequences, limit of functions, uniform convergence

2012 年第三届全国大学生数学竞赛决赛试题（非数学类）的最后一题为

（ⅰ）求解微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$$

（ⅱ）如 $y=f(x)$ 为上述方程的解，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

本文给出这道试题的解答并针对该试题的第（ⅱ）小题，介绍三种一般形式的推广.

1 原竞赛题解答

（ⅰ）微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x\mathrm{e}^{x^2}$$

通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x^2}+C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}.$$

将 $y(0)=1$ 代入，得 $C=0$，故方程的解为

$$y=\mathrm{e}^{x^2}.$$

（ⅱ）因为

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x<$$

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{n}{\sqrt[3]{n^4}+1}\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\arctan\sqrt[3]{n^2}=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{n}{\sqrt[3]{n^4}+1}\mathrm{e}\right]=$$

收稿日期：2013-10-14；**修改日期**：2014-09-04

作者简介：高剑明（1963—），男，上海人，副教授，从事常微分方程研究。Email: jmgao@dhu.edu.cn
叶海平（1964—），女，上海人，博士，副教授，从事分数阶微分方程研究。Email: hpye@dhu.edu.cn

利用代数方法求解积分

陈珊敏

（东华大学理学院应用数学系，上海 200051）

摘 要：利用解线性方程组的思想求解积分问题。

关键词：二元一次线性方程组；不定积分；定积分

中图分类号：G642 **文献标识码**：A **文章编号**：1009－0118(2012)08－0093－02

微积分是高等数学课程中的重要内容，而其中积分的求解更是方法繁多，技巧性强，给初学者带来不少困难。解线性方程组的知识中学里已经学过，即利用 n 个关系式求得 n 个未知数的值（n≥2）。同样有一些积分问题，单独对它求解比较困难，因此不妨去找另一个与之相关的积分问题，两者组成线性方程组来求解，那么解题过程可以简化，请看下面的例子。

例 1：计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^{2012}x}dx$。

解：本题中 $\cot x$ 的次方套用了年代，说明在计算中这不是主要问题，但对 $f(\cot x)$ 求积分不是我们擅长的，因此用 $\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 代入，则积分就变为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$。进一步观察被积函数，三角有理分式中分子正好是分母的两项之一，因此设

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$$

于是

$$I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\qquad(1)$$

又可以利用$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$，则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2012}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{2012}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{2012}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2012}x}{\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx=I_2\qquad(2)$$

将方程(2)代入方程(1)，即得 $I_1=I_2=\frac{\pi}{4}$。

如果积分形如$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}dx$ 或$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos^\alpha x}{\sin^\alpha x+\cos^\alpha x}dx$，其中 $0\leq\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$0<\theta_2\leq\frac{\pi}{2}$ 且

$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$，$\alpha\in N$，均可采用例 1 的方法求解。

例 2：求解不定积分$\int\frac{dx}{2x+\sqrt{1-x^2}}$。

解：本题的常规解法是先设 $x=\sin t$，于是 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$dx=\cos tdt$，代入后积分变为

$\int\frac{\cos t}{2\sin t+\cos t}dt$，如果再按照解三角有理分式的习惯方法套用万能公式，则会很复杂，不妨设

$$I_1(t)=\int\frac{\cos t}{2\sin t+\cos t}dt,\ I_2(t)=\int\frac{\sin t}{2\sin t+\cos t}dt,$$

于是

$$I_1(t)+2I_2(t)=\int dt=t+C_1\qquad(3)$$

考虑到 $(2\sin t+\cos t)'=2\cos t-\sin t$，所以

$$2I_1(t)-I_2(t)=\int\frac{2\cos t-\sin t}{2\sin t+\cos t}dt=\int\frac{d(2\sin t+\cos t)}{2\sin t+\cos t}=\ln|2\sin t+\cos t|+C_2\qquad(4)$$

求解联立方程组(3)和(4)，可得

$5I_1(t)=t+2\ln|2\sin t+\cos t|+C_1+2C_2$。

将 $t=\arcsin x$ 回代后，

$$I_1(x)=\frac{1}{5}\arcsin x+\frac{2}{5}\ln\left|2x+\sqrt{1-x^2}\right|+C,$$

其中 $C=\frac{C_1+2C_2}{5}$。

例 3：证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

证明：设 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$，如果单从题目本身出发是很难找到$\frac{1}{1+x^4}$的原函数的，但如果找到一个与 I_1 比较类似的积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$，设为 I_2，即 $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$，则首先证明 $I_1=I_2$。

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，当 x 从 $0\to+\infty$ 时，t 从 $+\infty\to0$，于是

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_{+\infty}^0\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^4}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=I_2\qquad(5)$$

然后计算 I_1+I_2。

$$I_1+I_2=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2},$$

$$I_1+I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(+\infty)-\arctan(-\infty)]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\qquad(6)$$

将方程(5)代入方程(6)，即得 $I_1=I_2=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。

例 4：求解不定积分$\int\frac{dx}{1+x^6}$。

解：本例如用有理分式的待定系数法，运算同样很麻烦。因此不妨设

$$I_1(x)=\int\frac{dx}{1+x^6},\ I_2(x)=\int\frac{x^2}{1+x^6}dx,$$

于是

$$I_1(x)+I_2(x)=\int\frac{1+x^2}{1+x^6}dx=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}-\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}\right)$$

突破传统教学方式的一次有益尝试

陈珊敏
（东华大学 理学院应用数学系，上海 200051）

摘要：阐述了高等数学网络视频课件的制作和运用；介绍了远程教与学体系的运行模式；对高等数学远程教学体系进行了优劣分析。

关键词：高等数学；远程教学；视频课件；学业管理
中图分类号：G642.0 **文献标志码：**A **文章编号：**1674-9324(2012)11-0068-02

计算机功能的不断提升，特别是进入新世纪以来网络技术的迅猛发展，使远程教育得以实施。学生们可以离开教室和传统的教学方式，利用网上的多媒体学习，掌握其想学习的各种专业知识。2011年春，我校继续教育学院（原成人教育学院）在安徽安庆招收了一批学生，聘请我担任他们《高等数学》的教学工作。由于学生与我身处异地，如何能够顺利地完成教学任务，这对我是一个挑战。而利用计算机、网络的强大功能，建立起高等数学的远程教学体系，更是我突破传统教学方式的一次有益尝试。

一、选择合适的教学内容

众所周知，继续教育学院采取以培养应用型人才为主的大专、高职教育，其学生不同于普通全日制大学的学生，他们白天要工作，只能利用晚上和休息日的时间来进行学习。因此要想在有限的60个课时内让学生学有所获，就应合理安排教学内容。基于此，我以大连理工大学出版社出版的《新编经济应用数学》作为主要教材，结合自己长期的教学体会，将教学内容分为函数与极限、微分学和积分学三大块。比如在微分学这一块，除了一元函数的求导、微分和中值定理、利用导数研究函数的特性，还进一步介绍了多元函数的偏导数、全微分，多元函数在一些基本经济模型中的应用，如边际成本等。同样在积分学中除了一元函数的不定积分、定积分，还讲述了二重积分及微分方程，如何利用积分求面积、体积，由边际函数求总函数，等等。每块都安排了习题课，最后还安排了总复习。

二、精心编制PPT讲义

利用PowerPoint编写教学讲义是多媒体教学的重要环节。在编写过程中，我主要根据教学需要，先将理论知识进行梳理，然后穿插经典例题、学生练习题等。由于《高等数学》是大学数学的经典课程，内容信息量多，大量的计算公式必需借助公式编辑器输入，因此会耗费大量时间，而根据以往教学体会，学生并不一定能体会到每个运算步骤中的细节，因此在编写一些例题时我都留有空白待录制多媒体视频课件时手写推导。而同时我又注意充分发挥PPT应用于教学的优势，如在利用导数研究函数的特性一节中，利用PPT动画演示形象生动、循序渐进的表现特点来制作表格、图形，帮助学生加深理解。

三、录制教学课件

根据教学计划，我一共录制了约2700分钟的视频课件。录制时是根据PowerPoint多媒体教学讲义作全面细致的讲解，尤其在讲解例题时，是将每一步演算过程、定理公式应用等详细地呈现给学生，有时还演示出学生常犯的一些错误。在此过程中我还注意启发引导学生，让学生自己去探求、学会解决问题的方法。考虑到学生的数学基础以及自主学习的能力，我在录制课件时尽量放慢语速，让学生有思考的余地。制作完成以后的《高等数学》视频课件进入到我校的网络教育操作平台，在“直播中心”或“点播中心”学生可点击学习。

四、网络操作平台的完美应用

我校继续教育学院在“上海电信”的帮助下，建立起了网络教育操作平台，为教师教学学生学习提供了十分便捷的条件，也为师生交流提供了方便。例如当我进入我的教师页面时，就会呈现出讲授课程、课后辅导等选项。

1.讲授课程一览中包括课程资源、教学文档和学生一览等选项。课程资源可以包括教学大纲、教学进度表以及PPT教学讲义等；教学文档则是课程资源相关资料的汇总；学生一览则提供了选修《高等数学》这一课程学生的具体信息，便于师生交流。

2.课后辅导一栏中包括作业中心、答疑中心、直播中心、点播中心、论坛中心等选项。作业中心顾名思义用于教师网上布置作业；答疑中心可以利用视频设备直接与学生交流，回答学生提出的问题；直播中心与点播中心显然是让学生观看或下载视频课件进行自主学习的。

五、学业基本管理

如果按每周4个学时的学习进度，那《高等数学》需要15~16周的学习时间，尽管学生无专门上课时间的限制，但要使学生认真自主地学习，学业管理必不可少，为此，我主要做了如下几方面的工作。

1.作业。众所周知，数学学习除了看课件，还要花费大量的时间做练习以巩固已学知识。我除了让学生做部分书后习题，还布置了4次作业。作业中心有发布、批改、管理、统计、反馈等选项。在发布一栏里上传作业文件点击发布，选择完成期限；为了使用自动批改模式，我把作业出成选择题模式，每次25题，一共100题，这样作业中心就会根据我提供的答案自动批改，减轻教师的工作量。

2.答疑。根据学生学习进度，我安排了期中、期末两

上好“线性代数”课的有效措施

朱忠华

（东华大学 理学院，上海 201620）

摘要：对初学“线性代数”的学生来讲，这门课是抽象、枯燥、难学的。阐述在教学实践过程中可采用的五个有效措施：从基础材料中找知识点、形象化讲解概念、重视内容的前后连接、借助多媒体手段、鼓励学生要有耐心，从而培养学生的学习兴趣和积极性，学好“线性代数”课程。

关键词：线性代数；教学实践；学习兴趣；有效措施

中图分类号：G642.0　**文献标志码**：A　**文章编号**：1000－615X(2011)06－0485－03

“线性代数”是大学工科学生的三大基础数学课之一，也是研究生入学考试的必考科目。“线性代数”课的内容与特点，使得它具有无可替代的重要地位。这门课程是中学代数的继续和提高，它的思想和方法如今已渗透到数学的各个分支，而且随着计算机的快速发展，用代数方法解决实际问题也已经渗透到现代科学、技术、经济、管理等各个领域[1]。

“线性代数”课程以线性方程组为研究主线，以行列式、矩阵、向量为主要研究工具。它的特点是内容抽象，定义、定理多，以向量部分最为典型，学习时需要较强的抽象思维与逻辑推理能力。在实际教学中，本课程的学分少，课时少，我校（东华大学）设置本课程为 32 学时，2 个学分。一周只有一次课，有的学生边学边忘，而教师则忙于赶进度，根本无法停下脚步去复习前面的知识，也没有课时上更多的习题课，这些都增加了教学的难度。初学“线性代数”的都是大一或大二学生，他们觉得比学“微积分”更难、更恐怖，也更没信心。

针对“线性代数”课程的特点，笔者在教学实践中采用了五个有效措施，取得了较好的效果。

一、从基础材料中找知识点

“线性代数”的初学者往往会被书本上一大堆抽象的名词定义和定理吓倒，因为他们只是在简单地“思维”和背诵这些定义和定理，而没有从最基础的材料中去观察与归纳。其实，“线性代数”中的每一个概念都能在学生所学的基础材料中找到原形。

举例来说，在初中、高中求解一次方程组，一般采取消元法，进行下列操作：(1)将一个方程的两边乘以同一个不为零的常数；(2)将一个方程的倍数加到另一个方程上去；(3)交换两个方程的顺序[2]。作为教师，要引导学生这样去看矩阵的概念并得到一个基本事实：上面的操作正是矩阵的初等变换，而初等变换就是“线性代数”最基本的技巧。如果对方程组本身和求解过程以及方程组的解进行观察，就会发现“线性代数”主要的基本概念，诸如线性相关、线性表示、最大线性无关组、向量空间及其维数等，这一系列初学者感到比较困难的内容，都在这些基础的材料中自然而然而且完整地显现出来。此时，教师不应该让学生去苦思冥想或机械记忆，而要耐心地引导学生把目光投到最基础的材料中去。这样，不少学生就能够观察到，这个概念与定理只不过是在描述以前学过的解一次方程组这个事实。这时他们会惊讶：难道“线性代数”这么简单？确实是这样，“线性代数”就是这么简单！这是笔者常对学

作者简介：朱忠华(1971—)，女，上海人，讲师，研究方向为基础数学教学。E-mail：zhzhu@dhu.edu.cn

第 25 卷第 3 期　　纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报　　Vol. 25, No. 3
2012 年 9 月　　BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES　　Sept., 2012

文章编号: 1006-8341(2012)03-0265-03

二阶常系数非齐次线性微分方程特解的直接积分法

朱忠华，尤苏蓉

(东华大学 理学院，上海 200051)

摘要: 为了更简便地求出二阶常系数线性非齐次微分方程的一个特解，给出了一种直接积分方法. 若已知二阶方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个实特征根 λ，可以使用直接积分的方法得到非齐次方程的一个特解 $y^*=\exp(-(\lambda+p)x)\left[\int(\exp((2\lambda+p)x)\int\alpha(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\right]$. 当方程有 2 个相等实特征根时，特解的表示形式更加简洁. 更主要的是，该直接积分法除了适用于教材中两种特殊类型函数 $f(x)$ 的非齐次方程，也可用于任意函数 $f(x)$ 的非齐次方程.

关键词: 特征根；特解；二阶常系数线性非齐次微分方程

中图分类号: O 175.1　　**文献标识码:** A

在《微积分》[1-2] 或《高等数学》[3] 教材中微分方程的求解时，二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解为 $y=Y+y^*$，其中 Y 为其对应的齐次线性微分方程的通解，y^* 为其一个特解. 通解 Y 可由对应的齐次微分方程的特征根直接写出，较难的是得到非齐次方程本身的一个特解 y^*. 文献[1] 常用的方法是使用待定系数法，得到对于非齐次项 $f(x)$ 取以下两种特殊函数形式时的特解：

(1) $f(x)=P_m(x)\exp(\lambda x)$，其中 λ 是常数，$P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式；

(2) $f(x)=\exp(\lambda x)[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，其中 λ,ω 是常数，$P_l(x)$，$P_n(x)$ 分别是 x 的一个 l 次、n 次多项式.

关于二阶常系数线性非齐次方程的特解，除了教材中所提出的待定系数法外，文献[4] 给出了特解的特征根公式法，该方法其实也是结合待定系数法，用公式的方式给出了上述两种类型非齐次项分别对应的特解. 本文将对具有实特征根的二次常系数线性非齐次方程，介绍直接通过积分得到非齐次方程特解的方法，该方法可以得到与待定系数法相同的结果. 更主要的是，直接积分法可以用于不同于上述两种类型函数的非齐次方程，具有更广泛的应用性. 为便于分析，在出现不定积分处，均假设被积函数存在原函数.

定理 1 设 λ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的一个特征根，则非齐次微分方程 $y''+py'+qy=\exp(\lambda x)\alpha(x)$ 的一个特解 $y^*=\exp(-(\lambda+p)x)\left[\int(\exp((2\lambda+p)x)\int\alpha(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\right]$，其中 $\alpha(x)$ 是关于 x 的任意连续函数，$\int\alpha(x)\mathrm{d}x$，$\int(\exp((2\lambda+p)x)\int\alpha(x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$ 都表示对应被积函数的一个原函数.

证明 设非齐次方程的一个特解为 $y^*=\exp(\lambda x)\beta(x)$，则 $y^{*\prime}=\exp(\lambda x)[\lambda\beta(x)+\beta'(x)]$，$y^{*\prime\prime}=$

收稿日期: 2012-04-27

通讯作者: 朱忠华(1971-)，女，上海市人，东华大学讲师. E-mail: zhzhu@dhu.edu.cn